

Problema 2: Teorema de Picard - Lindelöf

Miembros del equipo 4

Irak Emmanuel Martínez Lira¹ Carlos Adiel González Gutiérrez¹
Emilio Quiroz Orozco² Obed Leyva Victoriano³

¹Instituto Politécnico Nacional.

²Universidad Nacional Autónoma de México.

³Universidad Autónoma de Guerrero.

25 de enero de 2026



Cinvestav

Contenido

- 1 Enunciado del teorema de Picard - Lindelöf
- 2 Pasos de la demostración
- 3 Demostración
 - Paso 1
 - Paso 2
 - Paso 3
 - Paso 4
 - Paso 5
 - Paso 6



Contenido

- 1 Enunciado del teorema de Picard - Lindelöf
- 2 Pasos de la demostración
- 3 Demostración
 - Paso 1
 - Paso 2
 - Paso 3
 - Paso 4
 - Paso 5
 - Paso 6



Teorema de Picard–Lindelöf

Sean $I, J \subset \mathbb{R}$ dos intervalos cerrados y acotados. Denotamos por I° y J° a sus interiores, y sea $(x_0, y_0) \in I^\circ \times J^\circ$. Supongase que $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y de *Lipschitz* en su segunda entrada. Entonces existe $h > 0$ tal que $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$, existe una única función

$$f : [x_0 - h, x_0 + h] \rightarrow J \subset \mathbb{R}$$

diferenciable tal que

$$f'(x) = F(x, f(x)) \quad \text{con} \quad f(x_0) = y_0.$$



Contenido

- 1 Enunciado del teorema de Picard - Lindelöf
- 2 Pasos de la demostración
- 3 Demostración
 - Paso 1
 - Paso 2
 - Paso 3
 - Paso 4
 - Paso 5
 - Paso 6



Pasos para la demostración

- 1 Convertimos la ecuación diferencial en una ecuación integral.
- 2 Consideraremos $x_0 \in I^\circ$, de esta forma buscaremos $h > 0$ tal que $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$.
- 3 Establecer las iteraciones de Picard para así obtener la sucesión $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.
- 4 Demostrar que $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisface la condición de Cauchy uniforme.
- 5 Hallar el límite f que será la solución a nuestra ecuación diferencial.
- 6 Demostrar la unicidad.



Contenido

- 1 Enunciado del teorema de Picard - Lindelöf
- 2 Pasos de la demostración
- 3 **Demostración**
 - Paso 1
 - Paso 2
 - Paso 3
 - Paso 4
 - Paso 5
 - Paso 6



Contenido

- 1 Enunciado del teorema de Picard - Lindelöf
- 2 Pasos de la demostración
- 3 **Demostración**
 - Paso 1
 - Paso 2
 - Paso 3
 - Paso 4
 - Paso 5
 - Paso 6



Paso 1

Basta notar que podemos pasar de una ecuación a otra utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, a saber, si f cumple nuestras hipótesis entonces f cumple las ecuaciones:

$$f'(x) = F(x, f(x)) \quad \text{y} \quad f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, f(t)) dt$$



Contenido

- 1 Enunciado del teorema de Picard - Lindelöf
- 2 Pasos de la demostración
- 3 Demostración**
 - Paso 1
 - **Paso 2**
 - Paso 3
 - Paso 4
 - Paso 5
 - Paso 6



Paso 2

Como $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, se tiene que existe $\mathcal{M} > 0$ tal que $F(x, y) \leq \mathcal{M} \quad \forall (x, y) \in I \times J$. Además, como F es Lipschitz en la segunda entrada, existe $\mathcal{L} > 0$ tal que $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < \mathcal{L}|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in J$.

Como $(x_0, y_0) \in I^\circ \times J^\circ$ entonces $\exists r > 0$ tal que $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$, $[y_0 - r, y_0 + r] \subset J$.

Tomemos $h > 0$ con $h < \min \left\{ r, \frac{r}{\mathcal{M}}, \frac{1}{\mathcal{L}} \right\}$ se tendrá que

$$[x_0 - h, x_0 + h] \subset I.$$



Contenido

- 1 Enunciado del teorema de Picard - Lindelöf
- 2 Pasos de la demostración
- 3 Demostración**
 - Paso 1
 - Paso 2
 - Paso 3**
 - Paso 4
 - Paso 5
 - Paso 6



Paso 3

Sea $f_0 : [x_0 - h, x_0 + h] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_0(x) = y_0, \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.
Definimos una relación f_{k+1} de $[x_0 - h, x_0 + h]$ a \mathbb{R} mediante la regla de correspondencia

$$f_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, f_k(t)) dt \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Veamos que $f_k(x)$ define una función continua para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.



Sea

$$\mathcal{W} := \{k \in \mathbb{N} \mid f_k(x) \text{ define una función continua}\}.$$

Se tiene que $0 \in \mathcal{W}$. Suponga que $k \in \mathcal{W}$. Entonces

$$f_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(x, f_k(x)).$$

Por hipótesis, f_k es continua, luego $F \circ (\text{id} \times f_k)$ es continua, por lo tanto integrable. Luego $f_{k+1}(x)$ define una función. Como la integral indefinida y $x \mapsto y_0$ definen funciones continuas, f_{k+1} es una función continua.

Aplicando inducción, se tiene lo deseado.



Si $y \in f_{k+1}([x_0 - h, x_0 + h])$, entonces $y = f_{k+1}(x)$ para algún $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Luego

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, f_k(t)) dt$$

$$|y - y_0| \leq \int_{x_0}^x |F(t, f_k(t))| dt$$

$$|y - y_0| \leq \int_{x_0}^x \mathcal{M} dt$$

$$|y - y_0| \leq |x - x_0| \mathcal{M}$$

$$|y - y_0| \leq h \mathcal{M}$$

$$|y - y_0| < r$$

Trivialmente f_0 cumple esto. Así $f_k([x_0 - h, x_0 + h]) \subset [y_0 - r, y_0 + r]$,
 $\forall k \in \mathbb{N}$.



Una visualización de las iteraciones de Picard

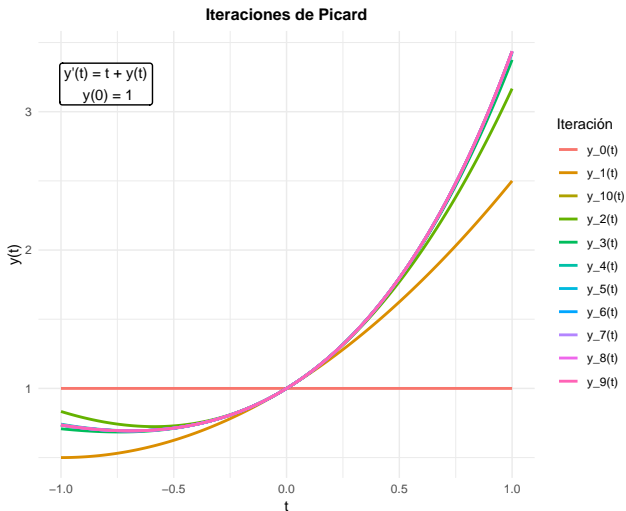


Figura: Visualización de las iteraciones de Picard

Contenido

- 1 Enunciado del teorema de Picard - Lindelöf
- 2 Pasos de la demostración
- 3 **Demostración**
 - Paso 1
 - Paso 2
 - Paso 3
 - **Paso 4**
 - Paso 5
 - Paso 6



Ahora, como $h < \frac{1}{\mathcal{L}}$ entonces $\mathcal{L}h < 1$, luego $\lim_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{L}h)^m = 0$ entonces, para $\frac{\varepsilon}{r} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ se tiene que

$$|f_{m+1}(x) - f_{n+1}(x)| < \varepsilon.$$

Luego, $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy uniforme.



Contenido

- 1 Enunciado del teorema de Picard - Lindelöf
- 2 Pasos de la demostración
- 3 Demostración**
 - Paso 1
 - Paso 2
 - Paso 3
 - Paso 4
 - Paso 5**
 - Paso 6



Paso 5

Como $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy uniforme, $F(x, f_k(x))$ es de Cauchy uniforme, luego convergente uniformemente. Así:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} f_{k+1}(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} y_0 + \int_{x_0}^x F(t, f_k(t)) dt \\ &= y_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x F(t, f_k(t)) dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x F\left(t, \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)\right) dt\end{aligned}$$

O bien, definiendo $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$,

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, f(t)) dt.$$



Contenido

- 1 Enunciado del teorema de Picard - Lindelöf
- 2 Pasos de la demostración
- 3 Demostración**
 - Paso 1
 - Paso 2
 - Paso 3
 - Paso 4
 - Paso 5
 - Paso 6



Paso 6

Sean φ y ψ soluciones de la ecuación diferencial. Utilizando la desigualdad de Gronwall: si $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, $u'(x) \leq \mathcal{A}u(x) \implies u(x) \leq u(a) \exp(\mathcal{A}(x - a))$.

De la condición de Lipschitz,

$$|\varphi'(x) - \psi'(x)| \leq \mathcal{L}|\varphi(x) - \psi(x)| \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Así, para $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, definiendo $U : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ por $U(x) = |\varphi(x) - \psi(x)|$ se tiene que $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq 0 \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, así $\varphi = \psi$.



