Problemas resueltos

Problema 1.

a) *Demostración.* Se procede por inducción recorrida. Sea $W := \left\{ n \in \mathbb{N} \mid Q^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \right\}$.
$Q^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{bmatrix}$, entonces $2 \in W$. Suponga que $k \in W$. Entonces

$$\begin{aligned} Q^{k+1} &= Q^k Q \\ &= \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

así, $k+1 \in W$. Aplicando inducción $W = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

□

b) *Demostración.* Q es diagonalizable con valores propios $\varphi := (1+\sqrt{5})/2$ y $1-\varphi$. Considere la matriz cambio de base de la base canónica a la base de vectores propios $P := \begin{bmatrix} \varphi & 1-\varphi \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y su inversa $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & \varphi - 1 \\ -1 & \varphi \end{bmatrix}$.
Entonces $Q = PDP^{-1}$ por lo que $Q^{3n} = PD^{3n}P^{-1}$. Así, del inciso (a),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} Q^{3n} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{3n+1} & f_{3n} \\ f_{3n} & f_{3n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{3n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

. Por isomorfismo se toma $\begin{bmatrix} f_{3n} \end{bmatrix}$ como f_{3n} y similarmente

$$\begin{aligned} f_{3n} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} PD^{3n}P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi & 1-\varphi \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1-\varphi \end{bmatrix}^{3n} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & \varphi - 1 \\ -1 & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\varphi^n)^3 & 0 \\ 0 & ((1-\varphi)^n)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\varphi^n)^3 - ((1-\varphi)^n)^3 . \right] \end{aligned}$$

. $\varphi^n = f_n\varphi + f_{n-1}$ y $(1-\varphi)^n = f_{n+1} - f_n\varphi$. En efecto. Considere los conjuntos

$$W_a := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi^n = f_n\varphi + f_{n-1}\} \text{ y } W_b := \{n \in \mathbb{N} \mid (1-\varphi)^n = f_{n+1} - f_n\varphi\}$$

. $\varphi^2 = 1/4(1+2\sqrt{5}+5) = 1/2(1+\sqrt{5}+2) = \varphi+1 = f_2\varphi + f_1$ por lo que $2 \in W_a$. Suponga que $k \in W_a$. Entonces $\varphi^{k+1} = \varphi^k\varphi = (f_k\varphi + f_{k-1})\varphi = f_k(\varphi+1) + f_{k-1}\varphi = (f_k + f_{k-1})\varphi + f_k = f_{k+1}\varphi + f_k$. Aplicando inducción se tiene lo deseado.

Ahora, $(1-\varphi)^2 = 1 - 2\varphi + \varphi^2 = 2 - \varphi = f_3 - f_2\varphi$. Suponga que $k \in W_b$. Así $(1-\varphi)^{k+1} = (1-\varphi)^k(1-\varphi) = (f_{k+1} - f_k\varphi)(1-\varphi) = f_{k+1} - f_{k+1}\varphi - f_k\varphi + f_k\varphi + f_k = f_{k+2} - f_{k+1}\varphi$. Aplicando inducción se tiene lo deseado. Entonces

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5}f_{3n} &= (f_n\varphi + f_{n-1})^3 - (f_{n+1} - f_n\varphi)^3 \\
&= f_n^3\varphi^3 + 3f_{n+1}^2\varphi^2 f_{n-1} + 3f_n\varphi f_{n-1}^2 + f_{n-1}^3 \\
&\quad - f_{n+1}^3 + 3f_{n+1}^2\varphi f_n - 3f_{n+1}\varphi^2 f_n^2 + f_n^3\varphi^3 \\
&= 2f_n^3\varphi^3 + 3f_n^2\varphi^2 f_{n-1} - 3f_{n+1}f_n^2\varphi^2 + \\
&\quad + 3f_n\varphi f_{n-1}^2 + 3f_n\varphi f_{n+1}^2 + f_{n-1}^3 - f_{n+1}^3 \\
&= 2f_n^3\varphi^3 \\
&\quad + 3f_n^2\varphi^2 f_{n-1} - 3f_n^2\varphi^2 f_{n+1} \\
&\quad + 3f_n\varphi f_{n-1}^2 + 4f_n\varphi f_{n+1}^2 \\
&\quad + f_{n-1}^3 - f_{n+1}^3 \\
&= 2f_n^3(2\varphi + 1) \\
&\quad + 3f_n^2 f_{n-1}(\varphi + 1) - 3f_n^2 f_{n+1}(\varphi + 1) \\
&\quad + 3f_n f_{n-1}^2\varphi + 3f_n f_{n+1}^2\varphi \\
&\quad + f_{n-1}^3 - f_{n+1}^3 \\
&= 4f_n^3\varphi + 2f_n^3 \\
&\quad + (\varphi + 1)(3f_n^2 f_{n-1} - 3f_n^2(f_n + f_{n-1})) \\
&\quad + \varphi(3f_n f_{n-1}^2 + 3f_n(f_n + f_{n-1})^2) \\
&\quad + f_{n-1}^3 - (f_n + f_{n-1})^3 \\
&= 4f_n^3\varphi + 2f_n^3 \\
&\quad + (\varphi + 1)(-3f_n^3) \\
&\quad + \varphi(6f_n f_{n-1}^2 + 3f_n^3 + 6f_n^2 f_{n-1}) \\
&\quad + f_{n-1}^3 - f_n^3 - 3f_n^2 f_{n-1} - 3f_n f_{n-1}^3 - f_{n-1}^3 \\
&= 2\varphi(f_n^3 + (f_n^3 + 3f_n^2 f_{n-1} + 3f_n f_{n-1}^2 + f_{n-1}^3) - f_{n-1}^3) \\
&\quad - (f_n^3 + (f_n^3 + 3f_n^2 f_{n-1} + 3f_n f_{n-1}^2 + f_{n-1}^3) - f_{n-1}^3) \\
&= 2\varphi(f_n^3 + (f_n + f_{n-1})^3 - f_{n-1}^3) \\
&\quad - (f_n^3 + (f_n + f_{n-1})^3 - f_{n-1}^3) \\
&= (2\varphi - 1)(f_n^3 + f_{n+1}^3 - f_{n-1}^3) \\
&= \sqrt{5}(f_n^3 + f_{n+1}^3 - f_{n-1}^3).
\end{aligned}
$$

Luego, se sigue que $f_{3n} = f_n^3 + f_{n+1}^3 - f_{n-1}^3$

$\square$

Problema 4.

Tómese la matriz diagonal de A como $D := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Existe una matriz invertible P tal que $A = P^{-1}DP$.

Luego $B = P^{-1}D^4P - 5P^{-1}D^2P + 5I$, esto es $PBP^{-1} = D^4 - 5D^2 + 5I$. Entonces se tiene:

a) Es verdadera.

$$\begin{aligned}
\det(A+B) &= \det(A+B)\\
&= \det(A+A^4-5A^2+5I)\\
&= \det(P^{-1}DP+P^{-1}D^4P-5P^{-1}D^2P+5P^{-1}IP)\\
&= \det(P^{-1}(D+D^4-5D^2+5I)P)\\
&= \det(P^{-1})\det(D+D^4-5D^2+5I)\det(P)\\
&= \det(D+D^4-5D^2+5I)\\
&= \det\left(\begin{bmatrix} -1+1-5+5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1+1-5+5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2+16-20+5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2+16-20+5\end{bmatrix}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) Es verdadera.

$$\begin{aligned}
\det(PBP^{-1}) = \det(B) &= \det(D^4-5D^2+5I)\\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1-5+5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-5+5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 16-20+5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 16-20+5\end{bmatrix}\right)\\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

c) Es falsa. La traza es una función lineal, aún más se tiene que para X, Y matrices de orden 4×4 arbitrarias, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A+B) &= \operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)\\
&= \operatorname{tr}(P^{-1}DP)+\operatorname{tr}(P^{-1}D^4P-5P^{-1}D^2P+5I)\\
&= \operatorname{tr}(PP^{-1}D)+\operatorname{tr}(PP^{-1}D^4)-5\operatorname{tr}(PP^{-1}D^2)+5\operatorname{tr}(I)\\
&= \operatorname{tr}(D)+\operatorname{tr}(D^4)-5\operatorname{tr}(D^2)+5\operatorname{tr}(I)\\
&= 0+34-50+20\\
&= 4.
\end{aligned}$$

d) Es falsa. Tomando lo mencionado y operado en c), se tiene:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A-B) &= \operatorname{tr}(A)-\operatorname{tr}(B)\\
&= \operatorname{tr}(P^{-1}DP)-\operatorname{tr}(P^{-1}D^4P-5P^{-1}D^2P+5I)\\
&= \operatorname{tr}(PP^{-1}D)-(\operatorname{tr}(PP^{-1}D^4)-5\operatorname{tr}(PP^{-1}D^2)+5\operatorname{tr}(I))\\
&= \operatorname{tr}(D)-(\operatorname{tr}(D^4)-5\operatorname{tr}(D^2)+5\operatorname{tr}(I))\\
&= 0-(34-50+20)\\
&= -4.
\end{aligned}$$

e) Es verdadera. Es el resultado obtenido en c).

Problema 5.

Sea $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ donde $f(n)$ es el número de $\mathbb{Z}_3$-subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_3^n$ de dimensión 1.

Como $\mathbb{Z}_3$ es un campo finito, la cantidad de n-adas en el espacio vectorial $\mathbb{Z}_3^n$ también es finita. En efecto.

Demostración. Denótese la cardinalidad de un conjunto A por $|A|$ y sea $W_5 := \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid |\mathbb{Z}_3^n| = 3^n\}$.

Claramente $1 \in W$, pues $|\mathbb{Z}_3| = |\{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}| = 3^1$. Suponga que $k \in W_5$. Entonces $|\mathbb{Z}_3^{k+1}| = |(\mathbb{Z}_3^k \times \{[0]_3\}) \cup (\mathbb{Z}_3^k \times \{[1]_3\}) \cup (\mathbb{Z}_3^k \times \{[2]_3\})| = |(\mathbb{Z}_3^k \times \{[0]_3\})| + |(\mathbb{Z}_3^k \times \{[1]_3\})| + |(\mathbb{Z}_3^k \times \{[2]_3\})|$ (pues son conjuntos disjuntos).

Ahora $\alpha : \mathbb{Z}_3^k \longrightarrow \mathbb{Z}_3^k \times \{[n]_3\}$ tal que $([x_1]_3, \ldots, [x_k]_3) \mapsto (([x_1]_3, \ldots, [x_k]_3), [n]_3)$ es claramente suprayectiva y si $(([x_1]_3, \ldots, [x_k]_3), [n]_3) = (([x_1']_3, \ldots, [x_k']_3), [n']_3)$ es claro que $([x_1]_3, \ldots, [x_k]_3) = ([x_1']_3, \ldots, [x_k']_3)$. Así $|\mathbb{Z}_3^k| = |\mathbb{Z}_3^k \times \{[n]_3\}|$ y entonces $|\mathbb{Z}_3^{k+1}| = 3^k + 3^k + 3^k = 3^{k+1}$. Aplicando inducción se tiene lo deseado. □

Considere que cualquier base de un $\mathbb{Z}_3$-subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^n$ que tenga dimensión 1 tiene cardinalidad 1. Luego, para cada vector $\omega \in \mathbb{Z}_3^n$, $\{\omega\}$ es base de un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^n$ de dimensión 1. A saber, el generado $\mathcal{L}(\{\omega\})$. Como el generado es el conjunto de todas las combinaciones lineales de ω se tendrá que los vectores $[0]_3\omega = 0, [1]_3\omega = \omega$ y $[2]_3\omega$ son los únicos vectores en el generado. Entonces el único vector linealmente dependiente de ω que genera el mismo espacio es $[2]_3\omega$, i.e. la mitad de los vectores no nulos en $\mathbb{Z}_3^n$ es generador de un único espacio vectorial de dimensión 1.

Así entonces, se tiene que $f(n) = (3^n - 1)/2$ y f está bien definida, pues $[3^n - 1]_2 = [3]_2^n - [1]_2 = [0]_2$.

Problema 6.

Supóngase que $n \in \mathbb{N}$ con $n = \sum_{k=0}^{l} a_k 10^k$. Entonces:

a) *Demostración.*

$$\begin{aligned}
[n]_2 &= \left[\sum_{k=0}^{l} a_k 10^k\right]_2 \\
&= \left[\sum_{k=1}^{l} a_k 10^k + a_0\right]_2 \\
&= \left[10 \sum_{k=1}^{l} a_k 10^{k-1} + a_0\right]_2 \\
&= [10]_2 \left[\sum_{k=1}^{l} a_k 10^{k-1}\right]_2 + [a_0]_2 \\
&= [0]_2 + [a_0]_2.
\end{aligned}$$

□

Luego n es divisible entre dos si $[a_0]_2 = [0]_2$, i.e., a_0 es par.

b) *Demostración.*

$$\begin{aligned}
[n]_3 &= \left[\sum_{k=0}^{l} a_k 10^k\right]_3 \\
&= \sum_{k=0}^{l} [a_k]_3 [10^k]_3 \\
&= \sum_{k=0}^{l} [a_k]_3 [10]_3^k \\
&= \sum_{k=0}^{l} [a_k]_3 \\
&= \left[\sum_{k=0}^{l} a_k\right]_3
\end{aligned}$$

Luego, n es divisible entre tres si $[\sum_{k=0}^{l} a_k]_3 = [0]_3$, i.e., la suma de los dígitos de n es divisible entre tres. □

c) *Demostración.* Suponga que tres divide a n y dos divide a n. Por el teorema fundamental de la aritmética n se puede descomponer en primos, digamos $n = p_1^{\gamma_1} \cdots p_j^{\gamma_j}$. Como 2 y 3 son primos, y ambos dividen a n entonces $p_{i_1} = 2$ para algún $i_1 \in \{1, \ldots, j\}$ y $p_{i_2} = 3$ para algún $i_2 \in \{1, \ldots, j\}$. Luego si $q := p_{i_1}^{\gamma_{i_1}-1} p_{i_2}^{\gamma_{i_2}-1} \prod p_k^{\gamma_k}$, $k \in \{1, \ldots, j\} \setminus \{i_1, i_2\}$, se tendrá que $n = (3)(2)q = 6q$. Luego seis divide a n. $\square$