Una demostración al teorema de existencia de Picard-Lindelöf

Julio Eduardo Enciso Molina[1]

Irak Emmanuel Martínez Lira[2]

Carlos Adiel González Gutiérrez[2]

Emilio Quiroz Orozco[3]

Obed Leyva Victoriano[4]

[1]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
[2]Instituto Politécnico Nacional
[3]Universidad Nacional Autónoma de México
[4]Universidad Autónoma de Guerrero

23 de Enero de 2026

Esta demostración es el resultado del trabajo colaborativo realizado en el 1er Taller de Problemas de Matemáticas Contemporáneas llevado a cabo en el Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

La demostración intenta evitar el uso de conceptos abstractos empleados en análisis reduciéndolos al cálculo elemental visto en cursos Cálculo I y II como los de la licenciatura en física y matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.

Se utilizaron los siguientes resultados y definiciones:

Definición 1 (Convergencia puntual y uniforme)**.** *Sea $f_k : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función para todo $k \in \mathbb{N}$. Se dice que la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$* ***converge puntualmente*** *a una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si $\forall x \in A$,*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Decimos que la sucesión ***converge uniformemente*** *a f si $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$*

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in S.$$

Definición 2 (Condición de Cauchy uniforme)**.** *Sean $f_k : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones $\forall k \in \mathbb{N}$. Se dice que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisface la* ***condición de Cauchy uniforme*** *si $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N$ y $\forall x \in A$,*

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Teorema 1 (Completez del espacio de funciones reales continuas)**.** *$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^A$ es una sucesión de funciones continuas que satisface la condición Cauchy uniforme si y sólo si existe $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua tal que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.
Si $x \in A$, como $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de Cauchy uniforme, en particular para x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

esto es, como $\mathbb{R}$ un campo arquimediano completo, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente para cada $x \in A$. Digamos $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)$. Por la unicidad del límite en $\mathbb{R}$, f es una función.

Como para $\varepsilon/2 > 0$ existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall m, n \geq N'$, pasando al límite en n, se tiene que

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Como $x \in A$ fue arbitrario, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Si $c \in A$, como $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f entonces para $\varepsilon/3 > 0$ existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \quad \forall x \in A, \forall k \geq N''$. Luego, dejando fijo k, como f_k es continua, para $\varepsilon/3$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f_k(x) - f_k(c)| + |f_k(c) - f(c)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Luego f es continua en c, el cual fue arbitrario por lo que es continua en todo A.

Ahora, como $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente a f, para $\varepsilon/2 > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Luego $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de Cauchy uniforme.

□

Teorema 2 (Convergencia uniforme para la integral)**.** *Sea* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{[a,b]}$ *una sucesión de funciones Riemann integrables sobre* $[a, b]$ *intervalo cerrado y acotado, que converge uniformemente a una función Riemann integrable* f*. Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, para $\varepsilon/(2(b - a))$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_k(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b (f_k(x) - f(x))dx\right| \\
&\leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)|dx \\
&\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}dx \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Definición 3 (Condición de Lipschitz)**.** *Sea* $f : A \longrightarrow R$ *una función.* f *se dice* ***de Lipschitz*** *si existe* $L > 0$ *tal que*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in A$$

Así, se da la siguiente demostración de existencia para el teorema:

Teorema 3 (Picard-Lindelöf)**.** *Sean* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervalos compactos. Sea* $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}(I) \times \operatorname{int}(J)$ *(* $\operatorname{int}(A)$ *denota el interior de A). Supóngase que* $F : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función continua y de Lipschitz en su segunda entrada. Entonces existe* $h > 0$ *tal que* $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$ *y existe una única función* $f : [x_0 - h, x_0 + h] \longrightarrow J$ *diferenciable tal que*

$$f'(x) = F(x, f(x)) \quad \textit{con } f(x_0) = y_0.$$

Demostración. Si $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface la ecuación integral

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, \varphi(t))dt$$

entonces, φ es diferenciable y por el Teorema Fundamental del Cálculo, $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$. Utilizando otra vez el Teorema Fundamental del Cálculo, una función f es solución de la ecuación integral si y sólo si es solución de la ecuación diferencial.

$I \times J$ es compacto, luego F es acotada, por lo que existe $M > 0$ tal que $F(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in I \times J$. Además, como F es de Lipschitz en su segunda entrada, existe $L > 0$ tal que $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L|y_1, y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in J$.

Como $(x_0, y_0) \in \text{int}I \times \text{int}J$ existe $r > 0$ tal que $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$ y $[y_0 - r, y_0 + r] \subset J$.

Sea $h > 0$ con $h < \text{mín}\{r, r/M, 1/L\}$.

Definimos $f_0 : [x_0 - h, x_0 + h] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $x \mapsto y_0 \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ y se define una relación f_{k+1} de $[x_0 - h, x_0 + h]$ a $\mathbb{R}$ por

$$f_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f_k(t))dt \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sea $W := \{k \in \mathbb{N} \mid f_k(x) \text{ define una función continua}\}$. $0 \in W$, claramente. Supóngase que $k \in W$. Así, $F \circ (\text{id} \times f_k)$ es una función continua, por lo tanto integrable. Así, de la unicidad de la integral, f_{k+1} es una función. Del Teorema Fundamental del Cálculo, la integral indefinida define una función continua, y $x \mapsto y_0$ también. Así $f_{k+1}(x)$ define una función continua. Aplicando inducción $W = \mathbb{N}$.

Ahora, si $y \in f_{k+1}([x_0 - h, x_0 + h])$, entonces $y = f(x)$ para algún $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Así

$$\begin{aligned}
y &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f_k(t))dt \\
|y - y_0| &\leq \int_{x_0}^{x} |F(t, f_k(t))|dt \\
|y - y_0| &\leq \int_{x_0}^{x} M dt \\
|y - y_0| &\leq |x - x_0|M \\
|y - y_0| &\leq hM \\
|y - y_0| &< r.
\end{aligned}$$

Trivialmente $f_0([x_0 - h, x_0 + h]) \subset [y_0 - r, y_0 + r]$ por lo que $f_k([x_0 - h, x_0 + h]) \subset [y_0 - r, y_0 + r] \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supóngase $m \geq n$. Así

$$\begin{aligned}
|f_{m+1}(x) - f_{n+1}(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |F(t, f_m(t)) - F(t, f_n(t))|dt \\
&\leq L \int_{x_0}^{x} |f_m(t) - f_n(t)|dt \\
&\leq L \int_{x_0}^{x} \left| \int_{x_0}^{t} L|f_m(s) - f_n(s)|ds \right| dt \\
&\leq L^2 \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t} |f_{m-1}(t) - f_{n-1}(t)|dsdt \\
&\vdots \\
&\leq L^{m+1} \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} |f_{m-n}(s) - f_0(s)|dsdt_m \ldots dt_1 \\
&\leq L^{m+1} h^{m+1} r.
\end{aligned}$$

Así, como $Lh < 1$, utlizando el hecho de que $\text{lím}_{k \to \infty} (Lh)^k = 0$, para $\varepsilon / r > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces

$$|f_{m+1}(x) - f_{n+1}(x)| < \varepsilon.$$

Entonces $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy uniforme.

Ahora, para $\varepsilon/L > 0$ se tiene que existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces

$$|F(x, f_m(x)) - F(x, f_n(x))| < L|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Así $\{F(x, f_k(x))\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy uniforme, luego uniformemente convergente. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} f_{k+1}(t) &= \lim_{k\to\infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f_k(t))dt \right) \\
&= y_0 + \lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} F(t, f_k(t))dt \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{k\to\infty} F(t, f_k(t))dt
\end{aligned}$$

O bien, definiendo $f := \lim_{k\to\infty} f_k$,

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))dt.$$

Lo que demuestra la existencia de una solución para la ecuación diferencial. $\square$