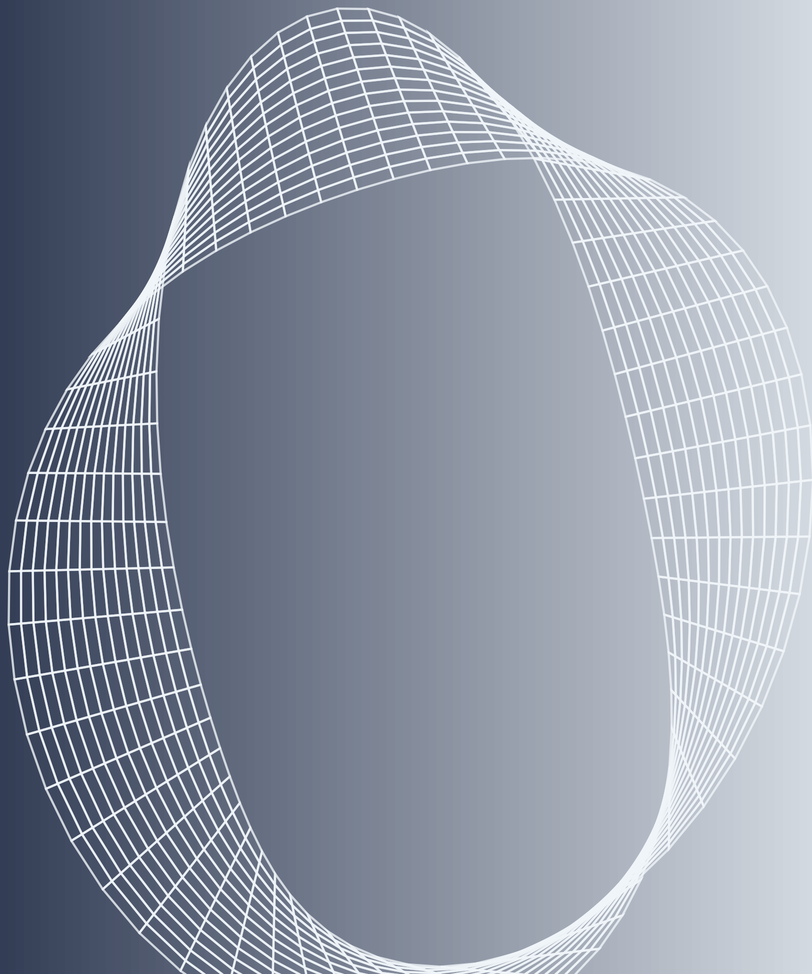
NOTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL:

Un trabajo en colaboración.



Adiel González, Santiago Méndez,
Obed Leyva

Índice general

1
Fundamentos de la geometría euclidiana

1.1 Espacios vectoriales euclidianos

Notación. Sean $e_1 := (1,0,0,\ldots,0), e_2 := (0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n := (0,0,0,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$. Al conjunto $\mathcal{C} := \{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ lo llamaremos **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

Definición. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. V, dotado de un funcional lineal $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$, se llamará un **espacio vectorial euclidiano** si se cumple:

(a) (Bilinealidad): $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1,y\rangle + \alpha_2\langle x_2,y\rangle \quad \forall x_1,x_2,y \in V$ y $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

$\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2\rangle = \beta_1\langle x,y_1\rangle + \beta_2\langle x,y_2\rangle \quad \forall y_1,y_2,x \in V$ y $\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$.

(b) (Simetría): $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad \forall x,y \in V$.

(c) (No negatividad) $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad x \in V$, y $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$.

El funcional simétrico y bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama **producto interno**. El producto interno canónico[1] para el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ está dado por la regla:

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n), z = (z_1\ldots,z_n) \in \mathbb{R}^n \left(\langle x,z\rangle = \sum_{i=1}^n x_i z_i\right)$$

Cada producto interno induce una función $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ con $x \mapsto \langle x,x\rangle$ a la cual se le define por

Definición. La función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty[$ dada por $x \mapsto \langle x,x\rangle$ se le llama **norma**. Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno canónico entonces a $\|\cdot\|$ le decimos **norma euclidiana**.

Proposición 1.1. *La norma inducida por un producto interno satisface las propiedades:*

a. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

b. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

c. $\|x+z\| \leq \|x\| + \|z\|$, $\forall x,z \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** $\forall x,z \in \mathbb{R}^n$ *se verifica* $|\langle x,z\rangle| \leq \|x\|\|z\|$.

Demostración. Ejercicio. □

[1] El nombre canónico puede verse como consecuencia de ser la única forma bilineal que hace ortogonal a la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Formalmente, si $S = [\![1,n]\!]$, $\delta : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ es la delta de Kronecker y $\iota : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la inclusión de S en $\mathbb{R}^n$ dada por $k \mapsto e_k$, entonces es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} S \times S \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\iota\times\iota"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[ur, dashed, "\langle\cdot,\cdot\rangle"'] & \end{tikzcd}$$

$$(k_1,k_2) \xrightarrow{\iota\times\iota} (e_{k_1},e_{k_2}) \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} \begin{cases} 1, & \text{si } k_1 = k_2 \\ 0, & \text{si } k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

Definición. Si $x, z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, definimos el **ángulo** $\theta \in [0, \pi]$ entre los vectores x y z como el número real que satisface

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, z\rangle}{\|x\|\|z\|}$$

Observación. $\langle x, z\rangle = \|x\|\|z\|\cos(\theta)$.

Definición. Si $x, z \in \mathbb{R}^n$, decimos que estos vectores son **ortogonales** si $\langle x, z\rangle = 0$.

Definición. Sean $x, z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Definimos la **proyección** del vector x sobre el vector z, denotada por x_z como

$$x_z := \frac{\langle x, z\rangle}{\|z\|^2} z$$

Orientación en $\mathbb{R}^n$.

Sean $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ bases de $\mathbb{R}^n$. Existe $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j.$$

Sea $A \in \mathbb{M}_n$ con $(A)_{ij} = a_{ij}$ y $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha \mapsto A\alpha$. Supóngase que $\alpha = \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k$. Note que $T_A(\alpha) = \sum_{k=1}^n d_k\beta_k$ para algunos $d_k \in \mathbb{R}$. Si se tiene que $T_A(\alpha) = 0_{\mathbb{R}^n}$, como $\{b_k\}_{k=1}^n$ es base, se tiene que $d_k = 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$. Por lo tanto $\alpha = 0$, luego T_A es no singular. Aún más, T_A es un isomorfismo, por lo que A es invertible. A se dice ser la matriz de cambio de base de la base $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ a la base $\{\beta_k\}_{k=1}^n$.

Sea $\mathfrak{B}$ el conjunto de todas las bases de $\mathbb{R}^n$. Sobre este conjunto, se define:

dadas $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ decimos que: $B_1 \sim B_2$ si y sólo si la matriz de cambio de base de la base B_1 a la base B_2 tiene determinante positivo.

Claramente la matriz cambio de base de B_1 a B_1 es $\mathrm{id}_{\mathbb{M}_n}$ por lo que $B_1 \sim B_2$. Como la matriz de cambio de base es invertible y $|A^{-1}| = 1/|A|$ entonces si $B_1 \sim B_2$ entonces $B_2 \sim B_1$. Si C es la matriz cambio de base de B_1 a B_2 y D es la matriz cambio de base de B_2 a B_3, se tiene que la matriz de cambio de base de B_1 a B_3 es DC. De este modo, si $B_1 \sim B_2$ y $B_2 \sim B_3$ entonces $|DC| = |D||C| > 0$. Luego $\sim$ define una relación de equivalencia.

Notamos que $\mathfrak{B}/\sim$ es un conjunto con dos elementos. Si $B \in \mathfrak{B}$ y $B \in [\{e_k\}_{k=1}^n]$ entonces diremos que el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado con la base B tiene orientación positiva. Si $B \notin [\{e_k\}_{k=1}^n]$ entonces decimos que $\mathbb{R}^n$ dotado con la base B tiene orientación negativa.

Ejercicio. Determina si la base $\{(1, 3, 5), (2, 3, 7), (4, 8, 3)\}$ proporciona una orientación positiva a $\mathbb{R}^3$.

Definición. Sean $x = (x_1, x_2, x_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Definimos el producto vectorial (también llamado producto cruz) de x y z denotado por $x \times z$ como sigue[2]

$$x \times z = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} e_3$$

Proposición 1.2. *El producto vectorial cumple las siguiente propiedades. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ entonces se tiene:*

a. $x \times z = -z \times x$

b. $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

c. $(\lambda x) \times z = \lambda(x \times z)$

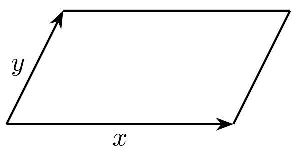
d. $x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z$

e. $\langle x \times y, z\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

Demostración. Ejercicio. □

Ejercicio. Demuestre que $\langle x \times y, z \times w\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle - \langle x, w\rangle\langle y, z\rangle$.

Ejercicio. Considere el paralelogramo $\mathcal{P}$:



Calcular el área de $\mathcal{P}$ en función de $x \times y$.

[2]Simbólicamente se suele escribir

$$x \times z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$