



Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Proyecto: Desigualdad de Hölder y Desigualdad de Minkowski

Méndez García Santiago

N° de boleta: °°°°°°°°. Grupo: 3FM1.

Álgebra III

06/06/2025



Índice general

I. Introducción	1
II. Desarrollo	2
III. Conclusión	10
Apéndice	11
Bibliografía	12

I. Introducción

El desarrollo formal de las matemáticas es un ámbito poco conocido fuera de ésta disciplina y otras cuantas como física e ingeniería, más aún, quizá, lo es la relación entre las distintas ramas de las matemáticas, que produce resultados interesantes y a veces útiles para demás áreas del conocimiento. Un ejemplo cautivador puede ser el álgebra lineal, donde conceptos como los espacios vectoriales y su dimensión se relacionan con el cálculo, la geometría diferencial, la física, etc.

Resulta increíble todo el acrecentamiento del acervo matemático y las curiosas conexiones entre diferentes campos; en este escrito se muestra una pincelada del desarrollo matemático, tomando en consideración el espacio vectorial n -dimensional \mathbb{R}^n : dos desigualdades importantes, la Desigualdad de Hölder y Desigualdad de Minkowski, comenzando simplemente por una relación de exponentes conjugados.

Cabe aclarar que este es un caso particular para el espacio vectorial \mathbb{R}^n , se puede consultar el enunciado general de ambas desigualdades en el apéndice.

Al trabajar en el espacio \mathbb{R}^n es natural pensar en las propiedades geométricas que puedan extenderse a n dimensiones, un ejemplo sencillo es el ángulo entre vectores o la ortogonalidad entre vectores, en ambos casos requiriendo primeramente desarrollar el concepto de producto interno.

Otra generalización para la cual es de vital importancia la Desigualdad de Minkowski es la noción de longitud, en \mathbb{R} ésta se representa mediante la función valor absoluto y en \mathbb{R}^2 usualmente se visualiza el plano y se usa el teorema de pitágoras. Mas, si tomamos como base a la función valor absoluto y consideramos las propiedades que cumple, nos quedamos con la idea intuitiva de qué debería cumplir una función que dé la longitud de un elemento.

Así, considerando el espacio \mathbb{R}^n podemos construir una función $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla tales propiedades. A una función tal, se le llama una norma en \mathbb{R}^n .

$$x \mapsto \mathcal{N}(x)$$

La curiosa aplicación de la Desigualdad de Minkowski en este caso, es que nos permite demostrar que cada elemento de una familia de funciones con una forma particular, es una norma en \mathbb{R}^n , permitiendo una infinidad de maneras de medir la longitud de un mismo elemento, con posibles resultados distintos entre sí. Es decir, la longitud de un elemento en \mathbb{R}^n puede variar dependiendo de la norma \mathcal{N} .

Note: this project was assigned for the course of Algebra III by the professor Abelardo Santaella Quintas.

«Toutes les expériences vitales sont les couleurs vives dont nous pourrions colorier notre courte existence; et ceux qui par pusillanimité ou par respect des lois n'osent pas user de ces couleurs-là se condamnent à une vie en grisaille, bien médiocre en regard de celle que connaissent les âmes hardies qui essayent de tout et qui méprisent ce qu'on pourrait appeler l'art académique de vivre.» - Étienne Souriau

II. Desarrollo

a)

Sea $p \in \mathbb{R}, p > 1$. Defina $q \in \mathbb{R} : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se dice que p y q son exponentes conjugados. Demuestre que si p y q son exponentes conjugados, entonces $(p-1)(q-1) = 1$. Concluya que si $y = x^{p-1}$, entonces $x = y^{q-1}$, donde p y q son exponentes conjugados

Demostración.

Sean p y q exponentes conjugados, es decir, $p > 1$ y:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Luego,

$$\begin{aligned} q + p &= pq \\ pq - p - q + 1 &= 1 \\ (p-1)(q-1) &= 1 \end{aligned}$$

Ahora, sea $y = x^{p-1}$, se tiene que

$$y^{q-1} = (x^{p-1})^{q-1} = x^{(p-1)(q-1)} = x$$

□

b)

Sean p y q exponentes conjugados, considere la función $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^{p-1}$. Use argumentos geométricos para establecer la desigualdad

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy$$

donde $a, b \in \mathbb{R}^+$. (*Sugerencia:* construya una gráfica en la que se muestre la función $y = x^{p-1}$. Dibuje el intervalo $[0, b]$ sobre el eje y . Interprete ambos miembros de la desigualdad como áreas)

Solución.

Considere la función f como se da en el problema, por el inciso anterior, se tiene que $x = y^{q-1}$, con lo cual $g : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $y \mapsto y^{q-1}$ es la función inversa de f . Viendo geoméricamente a la función f

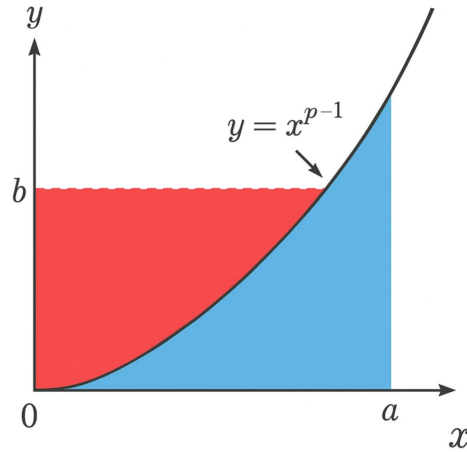


Figura 1: Gráfica de f .

Note que en la figura anterior la area roja corresponde a $\int_0^a x^{p-1} dx$ y la area azul corresponde a $\int_0^b y^{q-1} dy$. Así, el cuadrado ab es menor a la suma de las areas, es decir,

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy$$

□

c)

Concluya del resultado anterior si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y p, q son exponentes conjugados, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demostración.

Es claro que $\int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$, $\int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$, luego por el inciso anterior el resultado es evidente.

□

d)

Sean $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^n |\tilde{x}_i|^p = 1, \quad \sum_{i=1}^n |\tilde{y}_i|^q = 1$$

en donde p, q son exponentes conjugados. Use el inciso anterior para demostrar que $\forall i \in [1, n]$

$$|\tilde{x}_i \tilde{y}_i| \leq \frac{|\tilde{x}_i|^p}{p} + \frac{|\tilde{y}_i|^q}{q}$$

y concluya entonces que

$$\sum_{i=1}^n |\tilde{x}_i \tilde{y}_i| \leq 1$$

Demostración.

Sean $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ como en el problema y p, q exponentes conjugados. El inciso anterior es trivial para el caso $|\tilde{x}_i| = 0$ o $|\tilde{y}_i| = 0$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, y para $\tilde{x}_i \neq 0 \neq \tilde{y}_i$, $|\tilde{x}_i|, |\tilde{y}_i| \in \mathbb{R}^+$, luego por el inciso anterior

$$|\tilde{x}_i||\tilde{y}_i| = |\tilde{x}_i\tilde{y}_i| \leq \frac{|\tilde{x}_i|^p}{p} + \frac{|\tilde{y}_i|^q}{q}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^n |\tilde{x}_i\tilde{y}_i| \leq \sum_{i=0}^n \frac{|\tilde{x}_i|^p}{p} + \sum_{i=0}^n \frac{|\tilde{y}_i|^q}{q} \stackrel{\text{hipótesis}}{=} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

e)

Demuestre la *desigualdad de Hölder*

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

donde $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ y p, q son exponentes conjugados.

(Sugerencia: considere $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, defina $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}, \quad \tilde{y}_i = \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}}, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

y aplique el inciso anterior)

Demostración.

Primero, consideremos $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ como se muestra en el problema. Nótese que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\tilde{x}_i|^p &= \sum_{i=1}^n \left| \left(\frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}} \right) \right|^p = \left| \left(\frac{x_1}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}} \right) \right|^p + \dots + \left| \left(\frac{x_n}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}} \right) \right|^p \\ &= \frac{|x_1|^p}{\left| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \right|^p} + \dots + \frac{|x_n|^p}{\left| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \right|^p} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} = 1 \end{aligned}$$

Nótese que la penúltima igualdad se debe a que $|x_i| \geq 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, y de esto se llega a $\left| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \right| =$

$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ (*), lo cual lleva a la igualdad.

Del mismo modo, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n |\tilde{y}_i|^p = 1$$

Luego, por el inciso anterior

$$\sum_{i=1}^n |\tilde{x}_i \tilde{y}_i| \leq 1$$

Es decir,

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \right| \leq 1$$

Luego, de (*) y por propiedades del valor absoluto,

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

f)

¿A qué es equivalente la *desigualdad de Hörner* cuando $p = q = 2$?

Demostración.

Cuando $p = q = 2$, se tiene que, considerando el producto interno canónico en el espacio euclideo \mathbb{R}^n y $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} |x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| &\leq |x_1 y_1| + \cdots + |x_n y_n| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \sqrt{|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \end{aligned}$$

Es decir,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Equivale a la desigualdad de Schwarz

□

g)

Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|x_i + y_i|^p \leq (|x_i| + |y_i|)|x_i + y_i|^{p-1}$$

donde $p > 1 \in \mathbb{R}$. Concluya entonces que

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

Demostración.

De la desigualdad triangular se tiene que:

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Multiplicando por $0 \leq |x_i + y_i|^{p-1}$, se tiene que

$$|x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1},$$

$$|x_i + y_i|^p \leq (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1} = |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

Por otro lado, es claro que dados $a, b, c, d \in \mathbb{R} : a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$. Luego, aplicando lo anterior $n - 1$ veces,

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

□

h)

Aplice la *desigualdad de Hölder* a cada suma del lado derecho en la desigualdad del inciso anterior para demostrar que si p, q son exponentes conjugados, entonces

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demostración.

Primertamente, note que del inciso a) se tiene que $pq - p - q + 1 = 1$, así, $q(p-1) = p$ (*). Por otro lado, del inciso anterior y la *desigualdad de Hölder* se llega a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \quad (*)
\end{aligned}$$

□

i)

Concluya del inciso anterior la *desigualdad de Minkowski*

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

donde $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ y $p > 1 \in \mathbb{R}$

Demostración.

Primeramente, note que $\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \iff |x_i + y_i| = 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en cuyo caso la *desigualdad de Minkowski* es clara (pues $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$). Así, considere $|x_i + y_i| > 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Además, al p y q ser exponentes conjugados, $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ (*).

Luego, del inciso anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

□

j)

¿A qué es equivalente la *desigualdad de Minkowski* cuando $p = 2$?

Solución.

Cuando $p = 2$, se tiene que

$$\begin{aligned}\sqrt{|x_1 + y_1|^2 + \cdots + |x_n + y_n|^2} &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} + \sqrt{|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2}\end{aligned}$$

Y considerando el producto interno canónico en el espacio euclideo \mathbb{R}^n y $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^n$, además de notar que $|a|^2 = a^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$, se llega a

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Es decir, la *desigualdad de Minkowski* es equivalente a la desigualdad del triángulo cuando $p = 2$.

□

III. Conclusión

Este proyecto muestra un poco del desarrollo formal de las matemáticas, y cómo se puede llegar a resultados algo desconcertantes a primera vista.

No cabe duda que el perenne trabajar de los matemáticos seguira embelesando nuestro pensar, con esperanza, hasta que el deterioro cognitivo nos lo permita.

En concordancia con el espíritu de las matemáticas, repasemos formalmente las normas en \mathbb{R}^n y la aplicación de la *desigualdad de Minkowski* como despedida.

Definición (Norma sobre \mathbb{R}^n)

Una *norma* sobre \mathbb{R}^n es una función $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$i) \mathcal{N}(x) \geq 0$$

$$ii) \mathcal{N}(\alpha x) = |\alpha| \mathcal{N}(x)$$

$$iii) \mathcal{N}(x) = 0 \iff x = 0$$

$$iv) \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y) \text{ (desigualdad del triángulo)}$$

Es sencillo ver que $\mathcal{N}_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{N}_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son normas sobre \mathbb{R}^n . Mas, para ver que cada elemento de la siguiente familia de funciones es una norma en \mathbb{R}^n , note que la propiedad *iv*) es justamente la *desigualdad de Minkowski*, las propiedades *i*) – *iii*) son sencillas.

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p} \end{array} : \mathcal{N}_p \text{ es función y } p \in [1, +\infty) \right\}$$

A cada $\mathcal{N}_p \in \mathcal{Q}$ se le llama *norma p* sobre \mathbb{R}^n .

Por último, podemos preguntarnos la relación entre \mathcal{N}_p y \mathcal{N}_∞ . Finalizamos este escrito con la respuesta a esta pregunta.

Proposición

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, p \in [1, +\infty)$ se tiene que

$$\mathcal{N}_\infty(x) \leq \mathcal{N}_p(x) \leq n^{1/p} \mathcal{N}_\infty(x)$$

Demostración.

Sea $|x_j| = \sup\{|x_i| : i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} = \mathcal{N}_\infty(x)$ para algún $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Entonces $\mathcal{N}_\infty(x) = |x_j|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p =$

$\mathcal{N}_p(x)$. Así,

$$\mathcal{N}_\infty(x) \leq \mathcal{N}_p(x) = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n |x_j|^p \right\}^{1/p} = \{n|x_j|^p\}^{1/p} = n^{1/p} \mathcal{N}_\infty(x)$$

□

Corolario

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(x) = \mathcal{N}_\infty(x)$

Demostración.

Como las funciones $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto n^x$ son continuas, se tiene que

$g \circ f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto n^{1/x}$ también es continua. Luego,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} n^{1/p} = \lim_{p \rightarrow \infty} (g \circ f)(p) = g\left(\lim_{p \rightarrow \infty} f(p)\right) = g(0) = 1$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_\infty(x) \leq \mathcal{N}_p(x) & \leq & n^{1/p} \mathcal{N}_\infty(x) \\ \downarrow \begin{array}{c} p \\ \downarrow \\ \infty \end{array} & & \downarrow \begin{array}{c} p \\ \downarrow \\ \infty \end{array} \\ \mathcal{N}_\infty(x) & & \mathcal{N}_\infty(x) \end{array}$$

\therefore por el teorema de compresión, se sigue que $\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(x) = \mathcal{N}_\infty(x)$

□

Apéndice

Primeramente consideremos la siguiente definición. Donde (X, \mathcal{A}, μ) denota un espacio de medida σ -finito, X el espacio subyacente, \mathcal{A} la σ -álgebra de conjuntos medibles y μ la medida.

Definición (Espacio L^p)

Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y $p \in [1, +\infty)$. El espacio $L^p(X)$ consiste todas las funciones f medibles complejas en X tal que

$$\int |f|^p d\mu < \infty$$

La norma L^p de $f \in L^p(X)$ está definida por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Desigualdad de Hölder

Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, $p, q \in (1, +\infty) : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$, entonces $fg \in L^1(X)$ y su norma está mayorada naturalmente como

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Más generalmente, para $p, q \in [0, +\infty]$ y $r : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, si $f \in L^p(X)$ y $g \in L^q(X)$, entonces se tiene la igualdad si y sólo si $|f|^p$ y $|g|^q$ son linealmente dependientes en $L^1(X)$

Desigualdad de Minkowski

Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, $p \in [1, +\infty)$ y $f, g \in L^p(X)$ funciones, entonces $f + g \in L^p(X)$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

es decir,

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Bibliografía

- [1] Kenneth Hoffman, Ray Kunze. (1971). *Álgebra Lineal* 2da ed. Editorial Prentice Hall.
- [2] J. M. Rocha Martínez, G.D. Villa Salvador. *Cálculo infinitesimal de varias variables reales*. Volumen 1.

